

PGS.TS. ĐÌNH HUY HOÀNG

(Chủ biên)

PGS.TS. KIỀU PHƯƠNG CHI - TS. NGUYỄN VĂN ĐỨC

TS. VŨ THỊ HỒNG THANH - TS. TRẦN ĐỨC THÀNH

GIÁO TRÌNH  
GIẢI TÍCH

TẬP 1

(DÀNH CHO SINH VIÊN CÁC NGÀNH TỰ NHIÊN VÀ KỸ THUẬT)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC VINH

© Bản quyền thuộc về tác giả và Trường Đại học Vinh  
Không được in ấn, sao chụp, phát hành dưới mọi hình thức khi chưa có văn bản  
cho phép của tác giả và Trường Đại học Vinh.

# MỤC LỤC

<b>Lời nói đầu</b>	<b>5</b>
<b>Chương 1 Số thực và giới hạn của dãy số</b>	<b>7</b>
1 Tập các số thực . . . . .	7
1.1 Biểu diễn hình học của tập các số thực . . . . .	8
1.2 Tính trừ mật của tập các số thực, cận trên và cận dưới . . . . .	8
1.3 Tập các số thực mở rộng . . . . .	11
2 Giới hạn của dãy số . . . . .	12
2.1 Các khái niệm và tính chất cơ bản của dãy số và dãy số hội tụ	12
2.2 Sự hội tụ của dãy đơn điệu . . . . .	17
2.3 Các nguyên lý cơ bản của dãy hội tụ . . . . .	20
2.4 Giới hạn trên và giới hạn dưới . . . . .	24
2.5 Giới hạn vô hạn . . . . .	27
Hướng dẫn tự học . . . . .	27
<b>Chương 2 Giới hạn của hàm số và hàm số liên tục</b>	<b>31</b>
1 Hàm số . . . . .	31
1.1 Các khái niệm cơ bản về hàm số . . . . .	31
1.2 Các hàm số sơ cấp . . . . .	36
2 Giới hạn hàm số . . . . .	41
2.1 Các khái niệm về giới hạn hàm số . . . . .	41
2.2 Tính chất và các phép toán giới hạn của hàm số . . . . .	46
2.3 Đại lượng vô cùng bé và đại lượng vô cùng lớn . . . . .	52

3	Hàm số liên tục . . . . .	55
3.1	Các khái niệm và tính chất cơ bản của hàm số liên tục . . . . .	55
3.2	Tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn . . . . .	58
3.3	Hàm số liên tục đều . . . . .	60
3.4	Tính liên tục của các hàm sơ cấp . . . . .	62
3.5	Một vài giới hạn quan trọng . . . . .	62
3.6	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow a} (u(x))^{v(x)}$ . . . . .	63
	Hướng dẫn tự học . . . . .	65
<b>Chương 3 Phép tính vi phân hàm một biến</b>		<b>73</b>
1	Đạo hàm và vi phân cấp một . . . . .	73
1.1	Đạo hàm . . . . .	73
1.2	Mối quan hệ giữa tính liên tục và tính khả vi . . . . .	76
1.3	Ý nghĩa của đạo hàm . . . . .	76
1.4	Các quy tắc tính đạo hàm . . . . .	78
1.5	Đạo hàm của các hàm sơ cấp . . . . .	81
2	Các định lý về hàm khả vi . . . . .	81
2.1	Vi phân . . . . .	81
2.2	Các định lý cơ bản về hàm khả vi . . . . .	82
2.3	Ứng dụng vi phân để tính gần đúng . . . . .	85
3	Đạo hàm và vi phân cấp cao . . . . .	86
3.1	Đạo hàm cấp cao . . . . .	86
3.2	Công thức Leibnitz . . . . .	87
3.3	Vi phân cấp cao . . . . .	89
3.4	Khai triển Taylor . . . . .	90
4	Một số ứng dụng của phép tính vi phân . . . . .	96
4.1	Quy tắc L'Hospital . . . . .	96
4.2	Ứng dụng vào việc khảo sát hàm số . . . . .	100

Hướng dẫn tự học . . . . .	113
<b>Chương 4 Phép tính tích phân hàm một biến</b>	<b>119</b>
1 Nguyên hàm và tích phân không xác định . . . . .	119
1.1 Định nghĩa và ví dụ . . . . .	119
1.2 Các tính chất cơ bản . . . . .	121
1.3 Bảng tích phân bất định của một số hàm số . . . . .	122
1.4 Phương pháp tích phân từng phần và phương pháp đổi biến số	122
1.5 Tích phân các hàm hữu tỷ . . . . .	127
1.6 Tích phân một số hàm vô tỷ . . . . .	132
1.7 Tích phân các hàm lượng giác . . . . .	136
2 Tích phân xác định . . . . .	138
2.1 Định nghĩa tích phân xác định . . . . .	138
2.2 Điều kiện khả tích và các lớp hàm khả tích . . . . .	139
2.3 Tính chất của tích phân xác định . . . . .	141
2.4 Mối liên hệ giữa nguyên hàm và tích phân xác định . . . . .	143
2.5 Các phương pháp tính tích phân xác định . . . . .	148
3 Ứng dụng của tích phân xác định . . . . .	153
3.1 Tính độ dài cung . . . . .	153
3.2 Tính diện tích hình phẳng . . . . .	158
3.3 Tính thể tích của vật thể . . . . .	162
3.4 Diện tích xung quanh của mặt tròn xoay . . . . .	166
3.5 Một số ứng dụng vật lý . . . . .	168
4 Tích phân suy rộng . . . . .	170
4.1 Tích phân với cận vô tận . . . . .	170
4.2 Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn . . . . .	178
Hướng dẫn tự học . . . . .	183

<b>Chương 5</b>	<b>Lý thuyết chuỗi</b>	<b>189</b>
1	Chuỗi số . . . . .	189
1.1	Định nghĩa và các tính chất cơ bản . . . . .	189
1.2	Chuỗi số dương . . . . .	192
1.3	Sự hội tụ của chuỗi có dấu tùy ý . . . . .	197
2	Dãy hàm và chuỗi hàm . . . . .	200
2.1	Dãy hàm . . . . .	200
2.2	Tính chất của hàm giới hạn của dãy hàm . . . . .	203
2.3	Chuỗi hàm . . . . .	206
2.4	Tính chất của tổng chuỗi hàm . . . . .	210
3	Chuỗi hàm lũy thừa . . . . .	211
3.1	Khái niệm và tính chất cơ bản của chuỗi hàm lũy thừa . . . . .	211
3.2	Các tính chất của tổng của chuỗi lũy thừa . . . . .	214
3.3	Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa . . . . .	216
4	Chuỗi Fourier . . . . .	219
4.1	Hàm tuần hoàn . . . . .	219
4.2	Chuỗi lượng giác . . . . .	220
4.3	Khai triển hàm thành chuỗi Fourier . . . . .	222
	Hướng dẫn tự học . . . . .	227
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>233</b>

# LỜI NÓI ĐẦU

Do sự biến đổi của xã hội và sự phát triển của nội tại Toán học, việc giảng dạy Toán học ở các trường đại học có nhiều thay đổi. Xu hướng chung là nhanh chóng cho người học nắm bắt được các kiến thức cơ bản của Toán học và khả năng ứng dụng của chúng.

Để đáp ứng nhu cầu đó, trên cơ sở Đề cương chi tiết học phần Giải tích dành cho sinh viên nhóm ngành Tự nhiên, Kỹ thuật trong chương trình đào tạo đại học hệ chính qui theo hệ thống tín chỉ của trường Đại học Vinh, ban hành năm 2014, chúng tôi biên soạn Giáo trình Giải tích (Nhóm ngành tự nhiên - kỹ thuật). Cuốn sách này nhằm làm tài liệu học tập cho sinh viên nhóm ngành Tự nhiên, Kỹ thuật và đồng thời cũng là tài liệu tham khảo cho những ai quan tâm tới môn học này.

Mục đích của giáo trình là cung cấp cho người học các kiến thức cơ bản về phép tính vi phân, tích phân của hàm số một biến số và các kiến thức cơ sở về lý thuyết chuỗi. Đây là các kiến thức nền tảng giúp cho người học hiểu và vận dụng chúng một cách hiệu quả. Một số vấn đề trong đó đã được làm quen ở chương trình phổ thông. Tuy nhiên, trong giáo trình này, chúng tôi vẫn trình bày đầy đủ các vấn đề đó nhưng ở mức độ sâu và tổng quát hơn.

Vì đặc thù ngành học và thời lượng hạn chế nên trong giáo trình này chúng tôi không đi sâu vào những vấn đề nặng về lý thuyết mà chủ yếu tập trung vào những kết quả và ứng dụng của nó. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng chỉ ra những tài liệu tham khảo để những người có nhu cầu nghiên cứu tìm đọc.

Để phát huy khả năng tự học và tạo điều kiện thuận lợi cho người học có khả năng vận dụng tốt các kết quả lý thuyết thì sau các định nghĩa, định lý chúng tôi đưa ra nhiều ví dụ minh họa và sau mỗi chương chúng tôi đưa ra các vấn đề thảo

luận và hệ thống bài tập khá phong phú.

Với cách viết đơn giản, gọn, dễ hiểu, giảm nhẹ các vấn đề sâu lý thuyết, tập trung rèn luyện kỹ năng vận dụng, chúng tôi hy vọng rằng giáo trình này sẽ là tài liệu cần thiết và phù hợp với các em sinh viên theo học nhóm ngành Tự nhiên - Kỹ thuật.

Giáo trình được phân công biên soạn như sau: Chương 1, TS. Trần Đức Thành; Chương 2, PGS. TS. Đinh Huy Hoàng; Chương 3, TS. Vũ Thị Hồng Thanh; Chương 4, TS. Nguyễn Văn Đức và Chương 5 là PGS. TS. Kiều Phương Chi.

Mặc dù chúng tôi đã có nhiều cố gắng nhưng chắc chắn còn có những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của người đọc để chỉnh sửa và bổ sung cho hoàn thiện hơn. Mọi ý kiến góp ý xin gửi về Khoa Sư phạm Toán học, Trường Đại học Vinh, 182 Lê Duẩn, Thành phố Vinh, Tỉnh Nghệ An.

**Các tác giả.**



# CHƯƠNG 1

## SỐ THỰC VÀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Sau khi học xong chương này, sinh viên cần nắm được các nội dung sau:

- Các khái niệm về dãy số, đặc biệt là khái niệm dãy Cauchy và dãy hội tụ;
- Các nguyên lý cơ bản của dãy hội tụ;
- Các phương pháp tìm giới hạn, giới hạn trên, giới hạn dưới của dãy số; chứng minh dãy số hội tụ, dãy số phân kỳ.

### 1 Tập các số thực

Vì thời lượng không cho phép, chúng ta không đi sâu nghiên cứu việc xây dựng tập các số thực và các tính chất của nó. Chúng ta công nhận sự tồn tại của tập các số thực.

Như thường lệ, ta ký hiệu

$\mathbf{N}$  là tập các số tự nhiên  $\{0, 1, 2, \dots\}$ ;

$\mathbf{N}^*$  là tập các số tự nhiên dương  $\{1, 2, \dots\}$ ;

$\mathbf{Z}$  là tập các số nguyên  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ;

$\mathbf{Q}$  là tập các số hữu tỷ  $\{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*\}$ ;

$\mathbf{R}$  là tập các số thực (nói gọn là tập số thực).

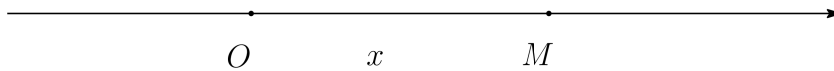
Các số thực không phải là số hữu tỷ được gọi là số vô tỷ.

Các phép toán, thứ tự (các bất đẳng thức) trong tập số thực; khái niệm và tính chất của giá trị tuyệt đối đã được giới thiệu trong chương trình toán phổ thông, ở

đây không trình bày lại, muốn tìm hiểu đầy đủ các vấn đề này cũng như việc xây dựng tập số thực và tính chất của nó bạn đọc có thể tìm đọc trong Chương 1 tài liệu tham khảo [3]. Sau đây chúng ta trình bày một số tính chất của tập các số thực cần dùng về sau.

## 1.1 Biểu diễn hình học của tập các số thực

Cho một trục số  $\Delta$  (Hình 1.1).



Hình 1.1

Chọn một điểm gốc  $O$  cố định trên  $\Delta$ . Ta có thể chứng minh rằng tương ứng  $\mathbf{R} \ni x \mapsto M \in \Delta$  xác định bởi quy tắc sau cho ta một song ánh từ  $\mathbf{R}$  lên trục số  $\Delta$

a) Độ dài của đoạn  $OM$  là  $|x|$ ,

b)  $M$  ở bên phải điểm gốc  $O$  nếu  $x > 0$ , ở bên trái nếu  $x < 0$  và  $M$  trùng với  $O$  nếu  $x = 0$ .

Vì vậy, trục số  $\Delta$  xem như một biểu diễn hình học của  $\mathbf{R}$ .

## 1.2 Tính trù mật của tập các số thực, cận trên và cận dưới

**1.2.1 Định lý.** Nếu  $\alpha$  và  $\beta$  là hai số thực và  $\alpha < \beta$  thì tồn tại số hữu tỷ  $r$  sao cho

$$\alpha < r < \beta.$$

**1.2.2 Chú ý.** 1) Định lý 1.2.1 nói lên tính trù mật của tập số hữu tỷ trong tập các số thực và cho thấy rằng giữa hai số thực có vô số số hữu tỷ nằm giữa chúng.

2) Ta có thể xem chứng minh Định lý 1.2.1 trong tài liệu tham khảo [3].

**1.2.3 Định nghĩa.** Giả sử  $A \subseteq \mathbf{R}$  và  $y \in \mathbf{R}$ . Ta nói

1)  $y$  là *cận trên* của  $A$  nếu  $y \geq x$  với mọi  $x \in A$ . Khi đó, ta còn nói  $A$  bị chặn trên bởi  $y$ .

2)  $y$  là *cận dưới* của  $A$  nếu  $y \leq x$  với mọi  $x \in A$ . Khi đó, ta còn nói  $A$  bị chặn dưới bởi  $y$ .